2

La funzione di utilità

2.1 Come misurare l'avversione al rischio

Kenneth Joseph Arrow e John W. Pratt propongono una misura di rischio che si può ottenere sviluppando in serie di Taylor[1] entrambi i membri dell'equazione (1.2) che definisce il certo equivalente. Si vuole approssimare la relazione per un rischio abbastanza piccolo. Siamo di fronte a un rischio limitato quando la ricchezza (futura) è vicina al suo valore atteso (se essa coincidesse esattamente con il valore atteso in tutti gli stati del mondo allora non ci sarebbe rischio), ovvero quando $R = \mathbb{E}[R]$.

Espandendo l'utilità della ricchezza intorno al valore atteso della ricchezza stessa fino al secondo ordine si ha:

$$U(R) \simeq U(\mathbb{E}[R]) + \frac{\partial U(\mathbb{E}[R])}{\partial R}(R - \mathbb{E}[R]) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U(\mathbb{E}[R])}{\partial R^2}(R - \mathbb{E}[R])^2 .$$

[1] Ricordo che, data una funzione $f(x)$, Taylor dimostra che essa si può scrivere come un polinomio di grado infinito utilizzando le derivate successive della funzione stessa secondo la seguente equazione:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k ,$$

dove $f^{(k)}(x_0)$ è la derivata $k-$esima della funzione $f(x)$ valutata nel punto $x = x_0$ e $k!$ è il fattoriale di k. Vale, inoltre:

$$f^{(0)}(x) = f(x) ,$$
$$0! = 1.$$

Se anziché prendere tutti gli infiniti termini della serie ci si ferma prima, si commette un errore e, quindi, si è di fronte a un'approssimazione della funzione. Limitandosi al secondo grando (con $k = 2$), per esempio, si ha

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 .$$

In questo modo la funzione $f(x)$ si è approssimata, intorno al punto $x = x_0$ mediante un polinomio di secondo grado.

Ora, prendendo il valore atteso di entrambi i membri si ottiene[2]

$$\mathbb{E}\left[U\left(R\right)\right] \simeq U\left(\mathbb{E}\left[R\right]\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U\left(\mathbb{E}\left[R\right]\right)}{\partial R^2}\mathbb{V}\left[R\right].$$

Il membro di sinistra, invece, si sviluppa intorno al valore $\chi = 0$ fino al primo ordine[3], il che coincide con l'idea di un rischio basso:

$$U\left(\mathbb{E}\left[R\right] - \chi\right) \simeq U\left(\mathbb{E}\left[R\right]\right) - U'\left(\mathbb{E}\left[R\right]\right)\chi.$$

Uguagliando le due approssimazioni precedenti si ottiene un'approssimazione del valore di χ nella forma seguente:

$$\chi \simeq -\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2 U(\mathbb{E}[R])}{\partial^2 R}}{\frac{\partial U(\mathbb{E}[R])}{\partial R}}\mathbb{V}\left[R\right].$$

Osserviamo, così, che il premio che si è disposti a pagare per non subire il rischio è proporzionale alla varianza e il fattore di proporzionalità è dato dall'opposto del rapporto tra la derivata seconda dell'utilità e la derivata prima. Tale rapporto viene definito «**indice di avversione (assoluta) al rischio di Arrow-Pratt**»:

$$AP_a = -\frac{\frac{\partial^2 U(R)}{\partial R^2}}{\frac{\partial U(R)}{\partial R}}.$$

Una variante si ottiene moltiplicando tale indice per il livello della ricchezza. Il comportamento rispetto al rischio di un soggetto, infatti, può dipendere non solo dalle sue preferenze, ma anche dal livello della ricchezza. Si ottiene, così, l'«**indice di avversione relativa al rischio di Arrow-Pratt**»:

$$AP_r = -\frac{\frac{\partial^2 U(R)}{\partial^2 R}}{\frac{\partial U(R)}{\partial R}}R.$$

Gli inversi di questi due indici (cioè l'opposto del rapporto tra derivata prima e derivata seconda) vengono definiti «**indici di tolleranza al rischio**» (assoluti o relativi).

2.2 Classificazione delle funzioni di utilità

Le funzioni di utilità sono spesso classificate secondo la forma che assume l'indice AP e mediante acronimi formati da quattro lettere:

1. la prima lettera indica se l'indice di avversione al rischio è costante (*constant* – C), crescente (*increasing* – I), decrescente (*decreasing* – D) oppure iperbolico (*hyperbolic* – H);

[2] Ricordo che vale $\mathbb{E}\left[R - \mathbb{E}\left[R\right]\right] = 0$ e che $\mathbb{E}\left[\left(R - \mathbb{E}\left[R\right]\right)^2\right]$ è la varianza della ricchezza.

[3] Questo per evitare di ottenere un polinomio di secondo grado in χ.

Tabella 2.1: Casi particolari della funzione di utilità (2.1)

Parametri	*Utilità*	AP_a	AP_r
$\gamma = 0, \alpha = 1$	$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} e^{-\beta R}$ esponenziale	β CARA	βR IRRA
$\alpha = 0, \gamma = 1$	$\frac{R^{1-\beta}-1}{1-\beta}$ potenza	$\frac{\beta}{R}$ DARA	$\frac{1}{\beta}$ CRRA
$\alpha = 0, \gamma = 1, \beta = 1$	$\ln R$ logaritmo	$\frac{1}{R}$ DARA	1 CRRA
$\gamma = -\beta$	$\frac{1-(\alpha-\beta R)^2}{2\beta}$ quadratica	$\frac{\beta}{\alpha-\beta R}$ IARA	$\frac{\beta R}{\alpha-\beta R}$ IRRA

2. la seconda lettera indica se l'indice è «assoluto» (A) oppure «relativo» (R);
3. le ultime due lettere sono sempre RA ad indice «*Risk Aversion*».

Secondo questa classificazione, quindi, le funzioni di utilità possono essere: HARA, CARA, CRRA, DARA, IARA, DRRA, IRRA e così via.

La forma più generale possibile che comprende tutte quelle appena elencate è la seguente:

$$U(R) = \frac{(\alpha + \gamma R)^{1-\frac{\beta}{\gamma}} - 1}{\gamma - \beta}, \tag{2.1}$$

le cui derivate sono

$$\frac{\partial U(R)}{\partial R} = (\alpha + \gamma R)^{-\frac{\beta}{\gamma}}, \qquad \frac{\partial^2 U(R)}{\partial R^2} = -\beta (\alpha + \gamma R)^{-\frac{\beta}{\gamma}-1}.$$

Affinché un soggetto sia avverso al rischio occorre che la derivata seconda sia negativa e, quindi, occorre che valga $\beta > 0$. Questa funzione di utilità si definisce HARA poiché l'indice (assoluto) di Arrow-Pratt vale

$$AP_a = \frac{\beta}{\alpha + \gamma R},$$

che è, appunto, una funzione iperbolica della ricchezza.

Alcuni casi particolari della (2.1) sono riassunti nella Tabella 2.1 e sono i seguenti.

- Funzione di utilità logaritmo:

$$U(R) = \ln R,$$

si ottiene ponendo, nella HARA, $\alpha = 0$, $\gamma = 1$ e $\beta = 1$. Con $\alpha = 0$ e $\gamma = 1$ la HARA diventa

$$U(R) = \frac{R^{1-\beta} - 1}{1 - \beta}.$$

Facendo tendere β a 1 si ottiene la forma indeterminata «zero fratto zero» che si può risolvere utilizzando il teorema de l'Hôpital:

$$\lim_{\beta \to 1} \frac{R^{1-\beta} - 1}{1 - \beta} = \lim_{\beta \to 1} \frac{\frac{\partial}{\partial \beta}\left(R^{1-\beta} - 1\right)}{\frac{\partial}{\partial \beta}(1 - \beta)} = \lim_{\beta \to 1} \frac{-R^{1-\beta} \ln R}{-1} = \ln R.$$

Gli indici di avversione al rischio di Arrow-Pratt per questa funzione di utilità sono:

$$U'(R) = \frac{1}{R}, \qquad U''(R) = -\frac{1}{R^2},$$

$$AP_a = \frac{1}{R}, \qquad AP_r = 1.$$

Essa, quindi, si può classificare come «*Decreasing Absolute Risk Aversion*» (DARA) oppure «*Constant Relative Risk Aversion*» (CRRA).

- Funzione di utilità potenza: si ottiene come nel caso precedente ma senza far tendere β a 1. Essa, quindi, ha la forma

$$U(R) = \frac{R^{1-\beta} - 1}{1 - \beta},$$

da cui si ricavano gli indici di Arrow-Pratt:

$$U'(R) = R^{-\beta}, \qquad U''(R) = -\beta R^{-\beta-1},$$

$$AP_a = \frac{\beta}{R}, \qquad AP_r = \beta.$$

Da qui osserviamo che la funzione di utilità è concava (cioè la derivata seconda è negativa e un soggetto è avverso al rischio) solo se vale $\beta > 0$. Anche questa funzione di utilità, come la precedente, si può classificare come DARA oppure come CRRA. Questa funzione è più generale rispetto alla precedente poiché il logaritmo si ottiene come caso particolare facendo tendere β a 1. La funzione di utilità potenza rappresenta piuttosto bene il comportamento di un singolo agente sul mercato poiché l'avversione al rischio (assoluta) decresce al crescere della ricchezza. In genere, infatti, chi è più ricco è disposto ad accettare rischi maggiori di chi è più povero (e questo perché il ricco ha un'utilità marginale minore).

- Funzione di utilità esponenziale: si ottiene ponendo $\alpha = 1$ e facendo tendere γ a zero. In particolare si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma\to 0}\frac{(1+\gamma R)^{1-\frac{\beta}{\gamma}}-1}{\gamma-\beta} &= \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}\lim_{\gamma\to 0}(1+\gamma R)^{1-\frac{\beta}{\gamma}} \\
&= \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}\lim_{\gamma\to 0}(1+\gamma R)(1+\gamma R)^{-\frac{\beta}{\gamma}} \\
&= \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}\lim_{\gamma\to 0}\left((1+\gamma R)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{-\beta} \\
&= \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}\left(\lim_{\gamma\to 0}(1+\gamma R)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{-\beta},
\end{aligned}$$

dove abbiamo un limite notevole[4] che dà:

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{(1+\gamma R)^{1-\frac{\beta}{\gamma}}-1}{\gamma-\beta}=\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}\left(e^{R}\right)^{-\beta}=\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}e^{-\beta R}.$$

La funzione di utilità esponenziale nella forma

$$U(R)=\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}e^{-\beta R},$$

ha i seguenti valori degli indici di Arrow-Pratt:

$$U'(R)=e^{-\beta R},\qquad U''(R)=-\beta e^{-\beta R},$$

$$AP_a=\beta,\qquad AP_r=\frac{\beta}{R}.$$

Dai conti sulle derivate vediamo che questa funzione è concava e, quindi, rappresenta un soggetto avverso al rischio, solo se vale $\beta > 0$. Vediamo, anche, che questa funzione può essere classificata come CARA (*Constant Relative Risk Aversion*) oppure come DRRA (*Decreasing Relative Risk Aversion*). Questa funzione rappresenta un soggetto la cui avversione al rischio rimane sempre la stessa, indipendentemente dal valore della ricchezza. Tale funzione, quindi, sembra più adatta a descrivere gli investitori istituzionali come, per esempio, i fondi comuni di investimento, che adottano strategie di investimento che sono sempre uguali e non dipendono dai volumi gestiti (un fondo «bilanciato» rimane sempre tale indipendentemente dalla ricchezza che gli è stata affidata dagli investitori).

[4] Ricordo che vale

$$\lim_{\gamma\to 0}(1+\gamma x)^{\frac{1}{\gamma}}=\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}x\right)^{a}=e^{x}.$$